Αποδείξεις

Στις πέντε αποδείξεις του 1ου Κεφαλαίου χρησιμοποιούμε τον τύπο του ορισμού της παραγώγου

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

1. Να αποδείξετε ότι για την παράγωγο της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ ισχύει

$$f'(x) = (c)' = 0$$

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

οπότε $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$

Άρα $(c)' = 0.$

2. Να αποδείξετε ότι για την παράγωγο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x, \quad x \in IR$ ισχύει

$$f'(x) = (x)' = 1$$

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$, και για $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Επομένως $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$

Άρα $(x)' = 1.$

3. Να αποδείξετε ότι για την παράγωγο της συνάρτησης

$f(x)=x^2, \quad x\in IR$ ισχύει

$$f'(x)=(x^2)'=1$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Έχουμε

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h,$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h.$

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x.$

Άρα $\mathbf{(x^2)'=2x}$

Αποδεικνύεται ότι γενικά ισχύει $\left(x^{\rho}\right)'=\rho x^{\rho-1}$ *για κάθε ρητό ρ*

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR και $c\in IR$, να αποδείξετε ότι

$$\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$. Έχουμε

$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$, και για $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c(f(x+h)-f(x))}{h}=c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x).$$

Άρα $\quad (c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x).$

5. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο IR , να αποδείξετε ότι

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= (f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x)) \\ &= (f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)), \end{aligned}$$

και για $h \neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

Άρα $\quad (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

Οι επόμενες αποδείξεις είναι από το κεφάλαιο της ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

6. Να αποδείξετε ότι αν $f_1, f_2, \ldots, f_\kappa$ είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ μιας μεταβλητής X, ισχύει

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$$

<u>Απόδειξη</u>:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa &= \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} \\ &= \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1 \end{aligned}$$

7. Θεωρούμε τις παρατηρήσεις **t_1, t_2,…,t_ν** μιας μεταβλητής Χ και τη μέση τιμή τους $\overline{x}$.

Να αποδείξετε ότι ο μέσος όρος των διαφορών $t_i - \overline{x}\,, \gamma\iota\alpha \;\; i = 1, 2, \ldots, \nu$ είναι ίσος με 0.

<u>Απόδειξη</u>

$$\frac{(t_1 - \overline{x}) + (t_2 - \overline{x}) + \ldots + (t_\nu - \overline{x})}{\nu}$$

$$= \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu \overbrace{- \overline{x} - \ldots - \overline{x}}^{\nu \; \acute{o}\rho o\iota}}{\nu}$$

$$= \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} - \frac{\nu\overline{x}}{\nu}$$

$$= \overline{x} - \overline{x}$$

$$= 0$$