ΘΕΩΡΙΑ 1ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (χωρίς αποδείξεις)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΟΡΙΑ- ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Να δώσετε τον ορισμό της συνάρτησης

<u>Συνάρτηση</u> από το σύνολο Α στο Β λέγεται μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο x του Α, αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο y του Β.

** Επίσης πρέπει να ξέρω

Για κάθε $x \in A$, $x \to y$ όπου $y \in B$

x: ανεξάρτητη μεταβλητή A: πεδίο ορισμού

y: εξαρτημένη μεταβλητή B: πεδίο τιμών

Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- το πηλίκο $R = f/g$, με $R(x) = f(x)/g(x)$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

2. Τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f;

<u>Γραφική παράσταση</u> C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού Α ονομάζεται το σύνολο των σημείων M(x , y) για τα οποία ισχύει y=f(x), για $x \in A$.

** Δηλαδή

Αν για τις συντεταγμένες ενός σημείου M(x , y) ισχύει y=f(x), τότε το σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Αντίστροφα, αν ένα σημείο M (x , y) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε για τις συντεταγμένες του ισχύει y=f(x).

3. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται <u>γνησίως αύξουσα</u> σε ένα διάστημα Δ του πεδίο ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$,

ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

4. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται <u>γνησίως φθίνουσα</u> σε ένα διάστημα Δ του πεδίο ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία x_1, $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$,

ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

5. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως μονότονη;

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της λέγεται <u>γνησίως μονότονη</u>.

6. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ **;**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει <u>τοπικό μέγιστο</u>

στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0.

** Το x_0 λέγεται θέση τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

Αν η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (**ολικό**) **μέγιστο**.

7. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει <u>τοπικό ελάχιστο</u> στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0.

** Το x_0 λέγεται θέση τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

Αν η ανισότητα $f(x) \geq f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (**ολικό**) **ελάχιστο.**

Προσοχή !

- Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο, και
- Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

8. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Αν υπάρχουν τα όρια δύο συναρτήσεων f και g στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ με $l_1, l_2 \in IR$ τότε :

i) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = l_1 + l_2$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(kf(x)\right) = k \cdot l_1$

iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = l_1 \cdot l_2$

iv) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{l_1}{l_2}$, εφόσον $l_2 \neq 0$

v) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\nu} = l_1^{\nu}$

vi) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{l_1}$ εφόσον $l_1 \geq 0$

****Προσοχή στις ιδιότητες ορίου για Σωστό-Λάθος! Ενδεχομένως και για συμπλήρωση**

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

9. Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται <u>συνεχής</u>, αν για κάθε $x_0 \in \mathrm{A}$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Όλες οι βασικές συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, ρητές, άρρητες , αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ τους, είναι συνεχείς.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

10. Πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0;

Μια συνάρτηση f λέγεται <u>παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0</u> του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και λέγεται παράγωγος της f στο x_0.

** **Προσοχή!** Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε κάποιο σημείο

11. Να δώσετε τον ορισμό της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης f

Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A*, και *B* το σύνολο των *x∈A* στα οποία η *f* είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε *x∈B* αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) <u>παράγωγος της *f*</u> και συμβολίζεται με *f '*.

** Η παράγωγος της συνάρτησης ***f '*** λέγεται **δεύτερη παράγωγος της *f*** και συμβολίζεται με ***f ''*.**

Ανάλογα ορίζονται η τρίτη παράγωγος f''' της f, και γενικά η νιοστή παράγωγος $f^{(\nu)}$ της f **.**

12. Να δώσετε τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής ενός μεγέθους y ως προς x όταν $x=x_0$.

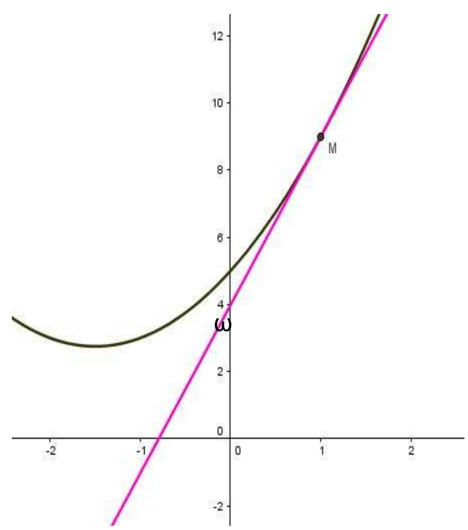
Έστω δυο μεγέθη x και y που συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$
Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το <u>ρυθμό μεταβολής</u> του $y=f(x)$ **ως προς x , όταν $x=x_0$.**

**<u>Έννοια της παραγώγου</u>

- **Εφαπτομένη γραφικής παράστασης**

Η παράγωγος της f στο x_0 , δηλαδή ο αριθμός $f'(x_0)$, εκφράζει το **συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(x_0, $f(x_0)$).**
Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο M(x_0, $f(x_0)$), θα έχει εξίσωση της μορφής

$$\boxed{y=f'(x_0)x+\beta}$$



Δεν ξεχνάμε ότι **ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας, εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x**.

Δηλαδή ισχύει $f'(x_0)=\varepsilon\varphi\omega$

- **Ρυθμός Μεταβολής**

Έστω δυο μεγέθη x και y που συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x=x_0$.

Γενικά, για οποιοδήποτε πρόβλημα ρυθμού μεταβολής γνωρίζουμε ότι:

► Ο ρυθμός μεταβολής του y=f(x) μετριέται σε μονάδες της συνάρτησης f (του y) ανά μονάδα της μεταβλητής x.

Π.χ. αν K(x) η συνάρτηση που δίνει το κόστος σε ευρώ (€) x ανταλλακτικών, ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K'(x)$ θα μετριέται σε €/ ανταλλακτικό.

► Όταν ο ρυθμός μεταβολής της f είναι θετικός, το μέγεθος y αυξάνεται και ο ρυθμός μεταβολής λέγεται ρυθμός αύξησης.

►Όταν ο ρυθμός μεταβολής της f είναι αρνητικός, το μέγεθος y μειώνεται και ο ρυθμός μεταβολής λέγεται ρυθμός μείωσης.

Α. Προβλήματα οικονομικών μεγεθών

Αν **K(x**) η συνάρτηση κόστους ,

E(x) η συνάρτηση των εσόδων και

P(x) η συνάρτηση κέρδους

μιας επιχείρησης , όπου η μεταβλητή x εκφράζει αριθμό προϊόντων, προφανώς ισχύει $$P(x) = E(x) - K(x)$$

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους, $K'(x)$, λέγεται ***οριακό κόστος*** .

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους, $P'(x)$, λέγεται ***οριακό κέρδος*** .

(**Άρα όταν διαβάζουμε «οριακό» σκεφτόμαστε παράγωγο**)

Β. Συνάρτηση θέσης – ταχύτητα – επιτάχυνση

Αν $x(t)$ η συνάρτηση θέσης ενός κινητού πάνω σ’ έναν άξονα, τότε:

►Η $x(t)$ δίνει τη θέση του κινητού πάνω στον άξονα, τη χρονική στιγμή t.

►Η *μέση ταχύτητα* υ_μ του κινητού κατά το χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή t_1

ως τη χρονική στιγμή t_2 είναι $\upsilon_\mu = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, δηλαδή $\upsilon_\mu = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$

►Η ***στιγμιαία ταχύτητα* σε μια χρονική στιγμή t_0**, είναι $\upsilon(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$

δηλαδή **είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θέσης** $x(t)$ **, ως προς t, όταν $t = t_0$.** Επομένως

$$\boxed{\upsilon(t_0) = x'(t_0)}$$

Η μονάδα μέτρησης της ταχύτητας είναι: *μονάδα μήκους/μονάδα χρόνου*, π.χ. m/s

► Όταν η ταχύτητα είναι θετική , το κινητό κινείται προς τη θετική φορά (συνήθως δεξιά) ,ενώ όταν η ταχύτητα είναι αρνητική το κινητό κινείται με αρνητική φορά.

Δηλαδή : ***το πρόσημο της ταχύτητας δείχνει την κατεύθυνση του κινητού***.

►Η ***επιτάχυνση*** του κινητού σε μια χρονική στιγμή t_0, είναι ο ρυθμός μεταβολής (δηλαδή η παράγωγος) της ταχύτητας.

Δηλαδή $$\boxed{\alpha(t_0) = \upsilon'(t_0) = x''(t_0)}$$

Επιτάχυνση θετική, σημαίνει ότι η επιτάχυνση έχει τη φορά της ταχύτητας, οπότε η ταχύτητα αυξάνεται και το κινητό *επιταχύνεται*.

Επιτάχυνση αρνητική, σημαίνει ότι η επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα, οπότε η ταχύτητα μειώνεται και το κινητό *επιβραδύνεται*.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. $(c)' = 0$	**6.** $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
2. $(x)' = 1$	**7.** $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
3. $(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$	**8.** $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
4. $(\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2} \quad \gamma\iota\alpha\ x \neq 0$	**9.** $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$
5. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \gamma\iota\alpha\ x > 0$	

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. $(cf(x))' = cf'(x)$	**3.** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$	**4.** $(\dfrac{f(x)}{g(x)})' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\boxed{\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

1. $(f^{\rho}(x))' = \rho\left[f(x)\right]^{\rho-1}\cdot f'(x)$
2. $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{f^{2}(x)}\cdot f'(x)$
3. $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$
4. $\left(\eta\mu\left(f(x)\right)\right)' = \sigma\upsilon\nu\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$
5. $\left(\sigma\upsilon\nu\left(f(x)\right)\right)' = -\eta\mu\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$
6. $\left(\varepsilon\varphi\left(f(x)\right)\right)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2} f(x)}\cdot f'(x)$
7. $\left(\sigma\varphi\left(f(x)\right)\right)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^{2} f(x)}\cdot f'(x)$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΘΕΩΡΗΜΑ (μονοτονία συνάρτησης)

- **Αν μια συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και ισχύει**

<u>*f ′(x)* > 0</u> για κάθε εσωτερικό σημείο του *Δ*, τότε η *f* είναι <u>γνησίως αύξουσα</u> στο *Δ*.

- **Αν μια συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και ισχύει**

<u>*f ′(x)* < 0</u> για κάθε εσωτερικό σημείο του *Δ*, τότε η *f* είναι <u>γνησίως φθίνουσα</u> στο *Δ*.

Προσοχή: **Το αντίστροφο δεν ισχύει !!!** Δηλαδή

► f γνησίως αύξουσα στο Δ $\not\Rightarrow$ f΄(x) > 0

► f γνησίως φθίνουσα στο Δ $\not\Rightarrow$ f΄(x) < 0

Επίσης αποδεικνύεται το **Κριτήριο 1ης παραγώγου**

- **Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f\,'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f\,'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f\,'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.**
- **Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f\,'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f\,'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f\,'(x) > 0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.**

Προσοχή!

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f\,'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, και η παράγωγος της f΄ διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο διάστημα αυτό.